



الف

A

آمادگی کنکور ۱۴۰۰

O5F

D

دوپینگ ماز

آزمون دوپینگ ماز – ۱۴۰۰/۰۲/۲۵

دفترچه پاسخ ریاضی

مدت پاسخ گویی: ۴۷ دقیقه

تعداد سؤال: ۳۰

طراح	ویراستار
نیما نیکنام	میلاد حسینی نامی
	ارسلان حسنوند
	مهدی حاجی نژادبان

۱- ساده شده عبارت $\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{30}+2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \sqrt{9-4\sqrt{2}}$ برابر کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $4\sqrt{2}-1$ (۳) $2\sqrt{6}+1$ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}} \times \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}{2\sqrt{2}+\sqrt{7}} = 2\sqrt{2}+\sqrt{7}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} = -\sqrt{7}-\sqrt{6}$$

$$\frac{\sqrt{30}+2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

$$-\sqrt{9-4\sqrt{2}} = -\sqrt{(1-2\sqrt{2})^2} = -|1-2\sqrt{2}| = 1-2\sqrt{2}$$

اگر همه موارد فوق را جمع کنیم، حاصل برابر ۱ می شود.

۲- در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله اول برابر ۹ و مجموع سه جمله بعدی برابر ۵۴ باشد، قدر نسبت دنباله کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

$$t_1 + t_2 + t_3 = 3t_2 = 9 \Rightarrow t_2 = 3$$

(جمله عمومی دنباله حسابی $t_n = t_1 + (n-1)d$ است).

$$t_1 + d = 3$$

$$t_4 + t_5 + t_6 = 3t_5 = 54 \Rightarrow t_5 = 18 \Rightarrow$$

$$t_1 + 4d = 18$$

با حل دستگاه زیر داریم:

$$\begin{cases} t_1 + d = 3 \\ t_1 + 4d = 18 \end{cases} \Rightarrow 3d = 15 \Rightarrow d = 5$$

دقت کنید اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، $2b = a + c$ ، پس $a + b + c = 3b$ ، همین طور بدانید که $t_m - t_n = (m-n)d$ بنا بر این $t_5 - t_2 = 3d$.

۳- می خواهیم با حروف a, b, c و ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ یک رمز عبور که شامل ۴ کاراکتر غیر تکراری است بسازیم که شامل ۲ عدد و ۲ حرف باشد، به چند صورت این کار امکان پذیر است؟

- (۱) ۸۴۰ (۲) ۱۸ (۳) ۴۳۲ (۴) ۲۱۶

پاسخ: گزینه ۳



۲ حرف از سه حرف و ۲ رقم از چهار رقم انتخاب می‌کنیم و بعد کنار هم می‌چینیم:

$$\binom{3}{2} \times \binom{4}{2} \times 4! = 3 \times 6 \times 24 = 432$$

چیدمان ۴ شیء ۲ رقم از ۴ رقم ۲ حرف از ۳ حرف

۴- در یک کلاس بیست نفری، ۷ نفر هم ورزشکارند و هم معدل بالای ۱۷ دارند. اگر تعداد دانش‌آموزانی که معدل پایین ۱۷ دارند، ۱۱ نفر باشد، با انتخاب یک نفر از این کلاس با چه احتمالی معدل بالای ۱۷ دارد ولی ورزشکار نیست؟

۰/۱ (۱) $\frac{7}{20}$ (۲) $\frac{2}{11}$ (۳) $\frac{7}{11}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

کل افراد کلاس ۲۰ نفر است، پس:

	غیرورزشکار	ورزشکار
معدل بالای ۱۷	y	۷
معدل پایین ۱۷	x	۱۱-x

$$7 + y + 11 - x + x = 20 \Rightarrow y = 2$$

یعنی ۲ نفر هستند که معدل بالای ۱۷ دارند و ورزش نمی‌کنند، پس این احتمال برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{20} = 0.1$$

۵- اگر مجموعه جواب نامعادله $x^3 + ax^2 + bx + c > 0$ به صورت $(1, 3) \cup (3, \infty)$ باشد، a برابر کدام است؟

۷ (۱) -۷ (۲) ۵ (۳) -۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

چون نامعادله در $x=1$ تغییر وضعیت داده ($x=1$ مرز باز جواب است)، ریشه ساده عبارت است و چون در دو طرف $x=3$ رفتار عبارت یکسان است، $x=3$ ریشه مضاعف عبارت است. یعنی نامعادله به صورت $(x-1)(x-3)^2 > 0$ بوده است.

از طرفی $(x-1)(x^2 - 6x + 9) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$ یعنی: $a = -7$ و $b = 15$ و $c = -9$ است.

۶- اگر دامنه $y = 3f(2x-1) + 1$ برابر $[-2, 1]$ باشد، دامنه تابع $g(x) = 2f(3x+1) - 1$ کدام است؟

$[-2, 0]$ (۱) $[-14, 4]$ (۲) $[-\frac{7}{2}, 4]$ (۳) $[-\frac{5}{6}, 0]$ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

روش اول: دامنه یعنی حدود X:

از روی حدود X، حدود عبارت داخل پرانتز را می‌یابیم، سپس عبارت داخل پرانتز جدید را بین این حدود قرار می‌دهیم و حدود X جدید را می‌یابیم.

$$-2 \leq x \leq 1 \Rightarrow -5 \leq 2x-1 \leq 1 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 2 \Rightarrow -6 \leq 3x+1 \leq 1 \Rightarrow -2 \leq x \leq 0$$

یعنی باید عبارت داخل پرانتز در بازه $[-5, 1]$ باشد، پس:



روش دوم: از اختلاف گزینه‌ها استفاده می‌کنیم:

$x = 4$ در گزینه‌های ۲ و ۳ هست و در ۱ و ۴ نیست و به‌ازای آن داریم:

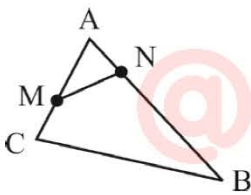
$$g(4) = 2f(13) + 1$$

از طرفی اگر قرار باشد عبارت داخل پرانتز اول برابر ۱۳ شود باید: $(x = 7 \Leftarrow 2x - 1 = 13)$ که در دامنه نیست، پس گزینه‌های ۲ و ۳ غلط هستند.

حال عدد دیگری را انتخاب می‌کنیم که در یکی از گزینه‌های ۱ و ۴ باشد و در دیگری نباشد، مثلاً $x = -2$ که در گزینه ۱ هست و در ۴ نیست.

$$g(-2) = 2f(-5) + 1 \quad \text{داریم: } x = -2$$

اگر عبارت داخل پرانتز تابع اول را برابر ۵- قرار دهیم، داریم: $2x - 1 = -5 \Rightarrow x = -2$ که در دامنه هست، پس گزینه ۱ که شامل ۲- بود، درست است.



۷- در مثلث زیر $AM = 2MC$ و $AN = NB$ ، نسبت مساحت ANM به مساحت ABC چقدر است؟

$$\frac{4}{9} \quad (2)$$

$$\frac{1}{6} \quad (1)$$

$$\frac{2}{5} \quad (4)$$

$$\frac{3}{5} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

از B به M وصل می‌کنیم، مثلث‌های ABM و ABC ارتفاع مشترک BH را دارند، پس نسبت مساحت‌های آنها برابر نسبت قاعده‌هاست، یعنی:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AC} = \frac{AM}{AM + MC} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

همین‌طور دو مثلث ANM و ABM نیز ارتفاع مشترک MH' را دارند، پس نسبت مساحت آنها نیز برابر نسبت قاعده‌هاست، یعنی:

$$\frac{S_{ANM}}{S_{ABM}} = \frac{AN}{AB} = \frac{AN}{AN + NB} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

پس:

$$S_{ANM} = \frac{1}{4} \times S_{ABM} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} S_{ABC} = \frac{1}{6} S_{ABC}$$

۸- در مثلث قائم الزاویه ABC ($A = 90^\circ$) و $BC = 13$ اگر روی ضلع BC تنها یک نقطه باشد که فاصله آن از A برابر ۶ واحد است

و آن را M بنامیم، کدام می‌تواند باشد؟

$$\frac{4}{9} \quad (4)$$

$$\frac{5}{8} \quad (3)$$

$$\frac{6}{7} \quad (2)$$

$$\frac{7}{19} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

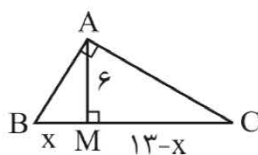
چون یک نقطه روی BC قرار دارد که فاصله آن از A، ۶ واحد است، یعنی طول ارتفاع وارد بر وتر ۶ واحد بوده است، پس: $AM^2 = BM \times CM$

$$36 = (13 - x)(x) \Rightarrow x = 4, 9$$

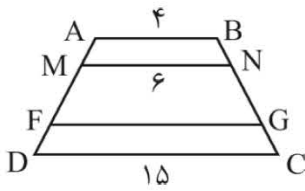
$$\frac{BM}{CM} = \frac{4}{9}$$

بنابراین:

البته $\frac{9}{4}$ هم صحیح است که در گزینه‌ها نیامده است.



۹- در ذوزنقه زیر اگر $AM = DF$ باشد و MN و FG موازی دو قاعده باشند، طول FG کدام است؟



- (۱) ۱۰
(۲) ۱۲
(۳) ۱۱
(۴) ۱۳

پاسخ: گزینه ۴

دقت کنید چون از AB به MN ، ۲ واحد افزایش طول داریم، باید از FG به DC نیز ۲ واحد افزایش طول داشته باشیم (چون $DF = AM$)، بنابراین $FG = ۱۳$ است.
راه سختشم اینه که قطر BD رو رسم کنی و چند بار از قضیه تالس استفاده کنی.

۱۰- اگر خط $y = mx - ۳$ سمت چپ محور y بر منحنی $y = x^2 + ۷x + ۶$ مماس باشد، عرض نقطه تماس کدام است؟

- (۱) ۳۶ (۲) -۶ (۳) ۰ (۴) -۴۲

پاسخ: گزینه ۲

$$x^2 + 7x + 6 = mx - 3 \Rightarrow x^2 + (7-m)x + 9 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (7-m)^2 - 36 = 0 \Rightarrow |7-m| = 6 \Rightarrow m = 1 \text{ یا } m = ۱۳$$

چون قرار است سمت چپ محور y ، خط بر منحنی مماس شود، $m = ۱$ جواب است.

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = 3$$

زیرا به ازای $m = ۱۳$ داریم:

و چون عدد مثبت است سمت راست محور y هاست.

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -3$$

حال به ازای $m = ۱$ داریم:

و با قرار دادن $x = -3$ در خط یا منحنی، $y = -۶$ به دست می آید.

۱۱- اگر دامنه $f(x) = \log_{\sqrt{2}}(ax^2 + bx + c)$ برابر $(-\infty, ۳)$ باشد و $f(-۱) = ۶$ باشد، مقدار $f(-۵)$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به دامنه، تابع مقابل لگاریتم تابعی خطی است. بنابراین $a = ۰$ ، از طرفی عبارت مقابل لگاریتم به ازای $x = ۳$ صفر می شود، بنابراین:

$$3b + c = 0, \quad f(-1) = 6 \Rightarrow \log_{\sqrt{2}}(-b + c) = 6 \Rightarrow -b + c = 8$$

$$\text{با حل دستگاه: } \begin{cases} 3b + c = 0 \\ -b + c = 8 \end{cases} \text{ داریم: } b = -2 \text{ و } c = 6$$

$$f(x) = \log_{\sqrt{2}}(6 - 2x) \Rightarrow f(-5) = \log_{\sqrt{2}} 16 = 8$$

بنابراین:

۱۲- انحراف از میانگین ۵ داده آماری به ترتیب اعداد ۵، -۴، ۲، -۶، a می باشند اگر ضریب تغییرات داده ها $\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، میانگین داده ها کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲



مجموع اختلاف از میانگین‌ها برابر صفر است، بنابراین:

$$a + (-6) + 2 + (-4) + 5 = 0 \Rightarrow a = 3$$

از طرفی:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}{5} = \frac{9 + 36 + 4 + 16 + 25}{5} = 18$$

یعنی واریانس برابر ۱۸ و بنابراین انحراف معیار برابر $3\sqrt{2}$ است، از طرفی $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ ضریب تغییرات) بنابراین:

$$\frac{3\sqrt{2}}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \bar{x} = 6$$

۱۳- تابع $f(x) = 2|x| - 4|x-1| - 3x$ در یک بازه اکیداً صعودی است، ضابطه معکوس تابع f در این بازه کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3} \quad -4 \leq x \leq -1 \quad (2)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{3} - 4 \quad -4 \leq x \leq -1 \quad (1)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{3} - 4 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

روش اول:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4x + 4 - 3x & 1 < x \\ 2x + 4x - 4 - 3x & 0 \leq x \leq 1 \\ -2x + 4x - 4 - 3x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -5x + 4 & 1 < x \\ 3x - 4 & 0 \leq x \leq 1 \\ -x - 4 & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین f در بازه $[0, 1]$ اکیداً صعودی است (شیب خط در این بازه مثبت است) و ضابطه معکوس آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = 3x - 4 \Rightarrow x = 3y - 4 \Rightarrow y = \frac{x+4}{3}$$

از طرفی $f(0) = -4$ و $f(1) = -1$ ، بنابراین با دامنه $[0, 1]$ برد f یا همان دامنه f^{-1} بازه $[-4, -1]$ است.

روش دوم: این بار با رسم، بازه‌ای که f در آن اکیداً صعودی است را مشخص می‌کنیم.

برای رسم توابع خطی شامل قدرمطلق کافی است مقدار تابع را در نقاط زاویه‌دار (ریشه‌های داخل قدرمطلق) و دو نقطه‌ی کمکی در دو طرف آنها به دست آورید، سپس نقاط به دست آمده را به ترتیب به هم وصل کنید.



دقت کنید وضعیت توابع خطی شامل قدرمطلق اگر تغییر کند در ریشه‌های داخل قدرمطلق تغییر می‌کند، پس واقعاً نیازی به رسم نبود و با محاسبه مقدار تابع در این نقاط و نقاط کمکی واضح بود که تابع در بازه $[0, 1]$ اکیداً صعودی بود و در آخر چون $f(0) = -4$ ، هم -4 باید جزء یکی از مرزهای دامنه تابع معکوس باشد و هم باید $f^{-1}(-4) = 0$ شود که تنها در گزینه ۲ این چنین است.



۱۴- به کمک انتقال، $y_1 = x^3$ را به $y_2 = x^3 - 6x^2 + bx - 5$ تبدیل کرده‌ایم، نقطه $A(-1, -1)$ روی y_1 به کدام نقطه زیر روی y_2 متناظر می‌شود؟

- (۱) $(-3, 2)$ (۲) $(1, 2)$ (۳) $(-3, -4)$ (۴) $(1, -4)$

پاسخ: گزینه ۲

در y_2 ، $x = \frac{-b}{3a} = 2$ می‌باشد، پس تابع y_2 به فرم $y_2 = (x-2)^3 + y_1$ است، از طرفی $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ ، خلاصه:

$$y_2 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + y_1$$

پس $y_1 = 3$ یعنی $y_2 = (x-2)^3 + 3$ ، پس هر نقطه روی y_1 را باید ۲ واحد به راست و ۳ واحد به بالا انتقال دهیم تا y_2 حاصل شود از جمله A را که روی y_2 به $(1, 2)$ تبدیل می‌شود.

۱۵- اگر $\tan \frac{14\pi}{5} = k$ باشد، $\sin \frac{7\pi}{5}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{2k}{1+k^2}$ (۲) $\frac{-k}{1+k^2}$ (۳) $\frac{k}{1+k^2}$ (۴) $\frac{-2k}{1+k^2}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{14\pi}{5} = 3\pi - \frac{\pi}{5} \Rightarrow \tan \frac{14\pi}{5} = -\tan \frac{\pi}{5} = k$$

$$\tan \frac{\pi}{5} = -k$$

بنابراین:

(راستی حتماً $k < 0$ چون $\tan \frac{\pi}{5} > 0$)

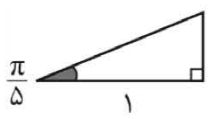
از طرفی:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin \frac{2\pi}{5} = 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5}$$

پس:

برای به دست آوردن $\sin \frac{\pi}{5}$ و $\cos \frac{\pi}{5}$ از روی $\tan \frac{\pi}{5}$ دو راه داری یا بری سراغ فرمول‌ها یا از تعریف نسبت‌های مثلثاتی استفاده کنی. ببین این خیلی راحت‌تره:



$$\frac{\pi}{5} \quad \xrightarrow{\text{فیثاغورث}} \text{وتر} = \sqrt{1+k^2}$$

خلاصه با توجه به تعریف سینوس و کسینوس داریم:

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \quad \sin \frac{\pi}{5} = \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{-2k}{1+k^2}$$

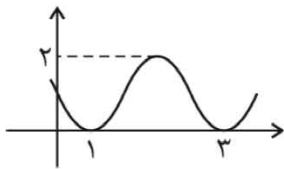
اگر هم دوست داری از فرمول‌ها بری اینجوریه:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + k^2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{5}} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$



$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{5} = 1 - \frac{1}{1+k^2} = \frac{k^2}{1+k^2}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{5} = \frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}} \xrightarrow{(k < 0 \text{ گفتیم})} \sin \frac{\pi}{5} = \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}$$



۱۶- نمودار $f(x) = a \cos\left(b\pi x + \frac{\pi}{2}\right) + c$ به صورت زیر است، مقدار تابع به ازای $\frac{1}{6}$ کدام است؟

۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

اولاً ساده شده تابع به صورت زیر است:

$$f(x) = -a \sin(b\pi x) + c$$

ثانیاً به خاطر نزولی بودن تابع روی محور y ، ضریب سینوس و ضریب x غیر هم علامتند: $ab > 0 \Leftrightarrow -ab < 0$
از طرفی مینیمم تابع برابر صفر و ماکزیمم برابر ۲ است، بنابراین:

$$\begin{cases} \max - \min = 2|a| = 2 \Rightarrow |a| = 1 \\ \max + \min = 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \end{cases}$$

و دوره تناوب تابع از روی نمودار برابر ۲ واحد و از روی تابع $\frac{2\pi}{|b\pi|}$ است، پس $|b| = 1$ با فرض این که a, b مثبت هستند، داریم:

$$f(x) = -\sin(\pi x) + 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

۱۷- مجموع جوابهای معادله $\cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0$ در بازه $[0, 4\pi]$ کدام است؟

۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

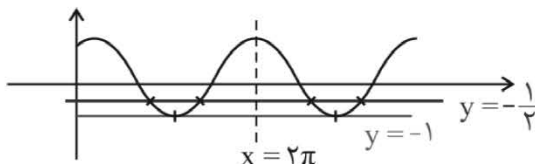
با توجه به این که $\cos^2 x = 2 \cos x - 1$ داریم:

$$\cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

بنابراین:

$$\cos x = -1, \cos x = -\frac{1}{2}$$

جمع جوابها برابر تعداد جوابها ضرب در محور تقارن نمودار است، طبق شکل:



۶ جواب داریم و محور تقارن $x = 2\pi$ است، پس: $(12\pi = 6 \times 2\pi = 12\pi)$ مجموع جوابها، البته می‌تونید ریشه‌ها رو به دست بیارید و دونه دونه جمع کنید، که یکم طولانیه!



۱۸- اگر $g(x) = \sin x$ و $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ ، برد $\text{fog}(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۴) ۱۱

(۳) ۱۰

(۲) ۹

(۱) ۸

پاسخ: گزینه ۳

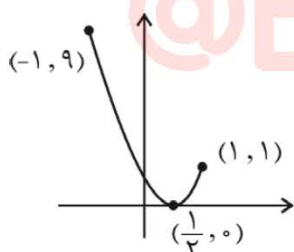
می دانیم برد $\sin x$ برابر $[-1, 1]$ است، یعنی دامنه تابع f محدود به بازه $[-1, 1]$ شده است، مثل این که اسم $\sin x$ را u بگذاریم:

$$\text{fog}(x) = f(u) = 4u^2 - 4u + 1 \quad -1 \leq u \leq 1$$

از طرفی می دانیم نمودار f سهمی شکل است و در $u = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$ دارای نقطهٔ مینیمم است (همون رأس سهمی). حالا کافیه مقدار تابع را در ابتدا و انتهای دامنه تابع و طول رأس سهمی به دست آوریم (همان نقاط بحرانی f با دامنه $[-1, 1]$) و بزرگترین و کوچکترین را به عنوان کرانهای برد انتخاب کنیم:

$$f(1) = 1, f(-1) = 9, f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \text{برد} = [0, 9]$$

نمودار $f(x)$ با دامنه $[-1, 1]$:



بنابراین، ده عدد صحیح در برد $\text{fog}(x)$ قرار دارد: $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$

۱۹- اگر $f(x) = \frac{ax - \sqrt{x^2 + 3x}}{x-1}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ برابر کدام است؟

(۴) $\frac{5}{2}$

(۳) $\frac{3}{4}$

(۲) $-\infty$

(۱) $+\infty$

پاسخ: گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - \sqrt{x^2 + 3x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + x}{x} = a + 1 = 3 \Rightarrow a = 2$$

از طرفی:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 3x}}{x-1} = \frac{2 - \sqrt{1+3}}{1-1} = \frac{2-2}{0} = \frac{0}{0}$$

روش اول: با استفاده از قاعدهٔ هسپیتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 - \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}}{1} = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$



روش دوم: با ضرب کردن در مزدوج عبارت صورت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x^2 - (x^2 + 3x)}{(x-1)(2x + \sqrt{x^2 + 3x})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 - 3x}{(x-1)(2x + \sqrt{x^2 + 3x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x(x-1)}{(x-1)(2x + \sqrt{x^2 + 3x})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x}{2x + \sqrt{x^2 + 3x}} = \frac{3}{4}$$

۲۰- چه تعداد از حدود زیر غلط محاسبه شده‌اند؟

$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} [x^2] = 4$ (پ)

$\lim_{x \rightarrow 1} [-x^2 + 2x] = 0$ (ب)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\cos x]}{x} = 0$ (الف)

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\cos x]}{x} = \frac{[1]}{0} = \frac{+}{\pm} = \cdot$

$\lim_{x \rightarrow 1} [-x^2 + 2x] = [1] = \cdot$

$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} [x^2] = [4] = 2$

دقت کنید اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ باشد و f در همسایگی $x = a$ نزولی باشد، آنگاه:

$(x \rightarrow a^+) \Rightarrow (f(x) \rightarrow (f(a))^-)$

$(x \rightarrow a^-) \Rightarrow (f(x) \rightarrow (f(a))^+)$

و اگر f در همسایگی $x = a$ صعودی باشد، آنگاه:

$(x \rightarrow a^+) \Rightarrow (f(x) \rightarrow (f(a))^+)$

$(x \rightarrow a^-) \Rightarrow (f(x) \rightarrow (f(a))^-)$

و در صورتیکه f در $x = a$ دارای $\max$ نسبی به شکل $\cap$ یا $\wedge$ باشد:

$(x \rightarrow a) \Rightarrow (f(x) \rightarrow (f(a))^-)$

و در صورتیکه f در $x = a$ دارای $\min$ نسبی به شکل $\cup$ یا $\vee$ باشد:

$(x \rightarrow a) \Rightarrow (f(x) \rightarrow (f(a))^+)$

۲۱- اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{2x^3 + ax^2 + bx + c} = +\infty$ باشد $a + b + c$ کدام است؟

۴ (۴)

-۴ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳



چون حاصل حد $+\infty$ شده است، پس باید مخرج ریشه سه گانه در $x = 2$ داشته باشد، چون قرار است که یکی از $(x-2)$ ها با صورت ساده شود و مخرج در $x = 2$ تغییر علامت ندهد، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{2(x-2)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

از طرفی:

$$2(x-2)^3 = 2x^3 - 12x^2 + 24x - 16$$

یعنی $a = -12$ و $b = 24$ و $c = -16$ پس $a+b+c = -4$ دقت کنید، ریشه m گانه در $x = \alpha$ به صورت زیر است:

$$m(x-\alpha)^m$$

۲۲- اگر $f(x) = \frac{x^3 + \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + x + 1}$ و $g(x) = \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + x + 1}$ حاصل $f'(\sqrt{3}) - g'(\sqrt{3})$ برابر کدام است؟

(۱) $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) 2 (۴) 1

پاسخ: گزینه ۴

$$f'(x) - g'(x) = (f - g)'(x)$$

$$(f - g)(x) = \frac{x^3 + \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + x + 1} - \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + x + 1} = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} = x - 1$$

$$(f - g)'(x) = 1 \Rightarrow f'(\sqrt{3}) - g'(\sqrt{3}) = 1$$

۲۳- اگر $f(x) = \left| \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{x^3 + 2x + 1}} \right| + x^3$ باشد، حاصل $f'_+(1) + f'_-(1)$ برابر کدام گزینه است؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۹

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به اینکه $x = 1$ ریشه یگانه داخل قدرمطلق است (عبارت داخل قدرمطلق عامل $(x-1)$ دارد)، مشتق چپ و راست

$$g(x) = \left| \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{x^3 + 2x + 1}} \right| \quad \text{در } x = 1 \text{ قرینه یکدیگرند، از طرفی مشتق } h(x) = x^3 \text{ در } x = 1 \text{ برابر ۳ می باشد، بنابراین:}$$

$$f'_+(1) + f'_-(1) = 2 \times 3 = 6$$

دقت کنید اگر فرض کنیم $g'_+(1) = k$ است، آن گاه $g'_-(1) = -k$ است و $f'_+(1) = k + 3$ و $f'_-(1) = -k + 3$ است. البته می توان k را حساب کرد ولی نه سر جلسه امتحان، الان عیبی نداره.

کلاً یاد بگیر اگر $g(x) = |P(x)|$ و تابع P در α مشتق پذیر باشد، برای محاسبه ی $g'(\alpha)$ یکی از سه حالت زیر را داریم:

$$P(\alpha) > 0 \Rightarrow g'(\alpha) = P'(\alpha)$$

حالت اول:

$$P(\alpha) < 0 \Rightarrow g'(\alpha) = -P'(\alpha)$$

حالت دوم:

$$P(\alpha) = 0 \Rightarrow g'_+(\alpha) = |P'(\alpha)|, g'_-(\alpha) = -|P'(\alpha)|$$

حالت سوم:



راستی اگر $x = \alpha$ ریشه یگانه $P(x) = 0$ باشد، حتماً مشتق چپ و راست g در $x = \alpha$ نابرابرند و البته واضح که قرینه هم هستند و اگر $x = \alpha$ ریشه چندگانه $P(x) = 0$ باشد (بیش از یگانه مثلاً ریشه مضاعف یا سه گانه یا...)، مشتق چپ و راست g در $x = \alpha$ برابر صفر هستند و $x = \alpha$ مشتق پذیر است.

مثل $g(x) = |(x-1)^3|$ یا $g(x) = |(x-1)^2|$ که در $x=1$ مشتق پذیرند و از روی شکل اوانام معلومه، در ضمن تا یادم نرفته به زبان خیلی ساده $x = \alpha$ رو ریشه m گانه $P(x)$ می گیم اگر در تجزیه $P(x)$ عامل $(x-\alpha)^m$ داشته باشیم (در حد نیازمون این تعریف کافیه). در آخر اگر بخوای مشتق $g(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{x^3 + 2x + 1}}$ رو در $x=1$ حساب کنی، از مشتق عامل صفر استفاده کن، یعنی مشتق $(2x^2 - x - 1)$ را بگیر و به جای x هاش یک بذار.

$$(2x^2 - x - 1)' = 4x - 1 \xrightarrow{x=1} 3$$

و از بقیه تابع هم در $x=1$ حد بگیر (البته این تابع پیوسته هست و حد و مقدارش در $x=1$ فرقی ندارند).

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2x + 1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow g'_+(1) = \frac{3}{2}, g'_-(1) = -\frac{3}{2}$$

۲۴- آهنگ متوسط تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 4x + 3}{x+1}}$ در بازه $[1, 6]$ با آهنگ لحظه ای تابع در $x = \alpha$ برابر است، α کدام است؟

(۱) $2/75$ (۲) $2/5$ (۳) $3/25$ (۴) $3/5$

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{x^2 + 4x + 3}{x+1} = \frac{(x+3)(x+1)}{x+1} = x+3$$

دقت کنید:

بنابراین ساده شده تابع به صورت $f(x) = \sqrt{x+3}$ است.

$$\frac{f(6) - f(1)}{6 - 1} = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5}$$

آهنگ متوسط f در $[1, 6]$:

$$f'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha+3}}$$

آهنگ لحظه ای f در $x = \alpha$:

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha+3}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sqrt{\alpha+3} = \frac{5}{2} \Rightarrow \alpha+3 = \frac{25}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{13}{4} = 3/25$$

۲۵- حدود a کدام باشد تا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x > 0 \\ a & x = 0 \\ 2 - x & x < 0 \end{cases}$ در $x=0$ فاقد اکستریم نسبی باشد؟

(۴) $-1 \leq a \leq 2$

(۳) $-1 < a \leq 2$

(۲) $-1 \leq a < 2$

(۱) $-1 < a < 2$

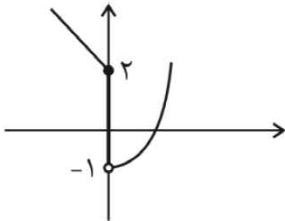
پاسخ: گزینه ۳



روش اول: با توجه به تعریف اکسترمم نسبی اگر قرار است $x=0$ اکسترمم نسبی تابع نباشد، باید $f(0)$ بین $f(0^-)$ و $f(0^+)$ باشد از طرفی $f(0^+)=(-1)^+$ و $f(0^-)=2^+$ بنابراین داریم:

$$(-1)^+ < f(0) < 2^+ \Rightarrow -1 < f(0) \leq 2$$

روش دوم: از روی نمودار همان طور که می بینیم اگر $a=2$ باشد $x=0$ اکسترمم نسبی نمی شود، ولی اگر $a=-1$ باشد، $x=0$ طول مینیمم نسبی می باشد.



۲۶- اگر $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ باشد، مجموع مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع در بازه $[0, 2]$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

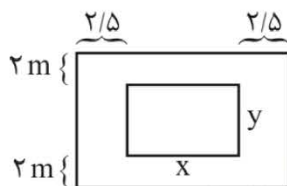
نقاط بحرانی تابع $x=0$, $x=1$, $x=2$ می باشند و مقدار تابع در این نقاط:

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 5$$

بنابراین ماکزیمم تابع برابر ۵ و مینیمم آن برابر صفر است و مجموع آنها برابر ۵ می باشد.

۲۷- مطابق شکل می خواهیم یک زمین چمن مستطیل شکل به مساحت $2/000$ متر مربع بسازیم، اگر لازم باشد از بالا و پایین هر کدام ۲

متر و از چپ و راست هر کدام $2/5$ متر دور زمین خالی باشد، نسبت طول به عرض زمین $\left(\frac{x}{y}\right)$ کدام باشد تا کمترین مساحت برای ساخت زمین لازم باشد؟



- (۲) $\frac{5}{4}$
(۴) $\frac{4}{3}$

- (۱) $\frac{3}{2}$
(۳) ۱

پاسخ: گزینه ۲

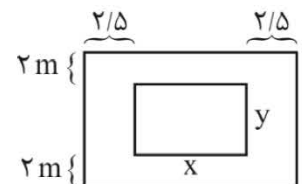
$$xy = 2000 \Rightarrow y = \frac{2000}{x} \Rightarrow S = (x+5)(y+4)$$

روش اول:

$$\Rightarrow S(x) = (x+5)\left(\frac{2000}{x} + 4\right) \Rightarrow S(x) = 2000 + \frac{10000}{x} + 4x + 20 = \frac{10000}{x} + 4x + 2020$$

$$\Rightarrow S'(x) = \frac{-10000}{x^2} + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 2500 \Rightarrow x = 50$$

$$\Rightarrow y = \frac{2000}{50} = 40 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{50}{40} = \frac{5}{4}$$



روش دوم: مساحت زمین مورد نیاز در صورتی کمترین است که:

$$\frac{x}{y} = \frac{\text{طول حاشیه افقی}}{\text{طول حاشیه عمودی}} = \frac{2/5}{2} = \frac{5}{4}$$

۲۸- در یک بیضی فاصله‌ی یک سر قطر کوچک تا یک کانون ۵ واحد و فاصله‌ی یک سر قطر بزرگ تا نزدیک‌ترین کانون به آن ۲ واحد است، طول قطر کوچک بیضی کدام است؟

۱۰ (۴)

۴ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

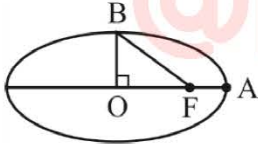
پاسخ: گزینه ۲

دقت کنید: $OB = b$, $OF = c$ بنابراین با توجه به قضیه فیثاغورث $BF = a$ از طرفی:

$$BF = a = 5, AF = a - c = 2 \Rightarrow 5 - c = 2 \Rightarrow c = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 9 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow BB' = 2b = 8$$

$$AF = OA - OF = a - c$$



۲۹- دایره‌ای به مرکز $(2, 1)$ با دایره $x^2 + 2x + y^2 + 6y + 1 = 0$ مماس درون است، شعاع دایره کدام است؟

۲ (۴)

۸ (۳)

۳ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

باید طول خط‌المركزین برابر قدرمطلق تفاضل شعاع‌های دایره‌ها باشد $OO' = |R - R'|$.

$$x^2 + 2x + y^2 + 6y + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 9 + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y+3)^2 = 9 \Rightarrow O'(-1, -3), R' = 3$$

$$OO' = \sqrt{(2+1)^2 + (1+3)^2} = 5 \Rightarrow |R - 3| = 5 \Rightarrow R = 8 \quad \checkmark$$

$$R = -2 \quad \times$$

۳۰- ظرف A شامل ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه است و ظرف B شامل ۲ مهره سفید و ۱ مهره سیاه است. از ظرف A دو مهره برمی‌داریم و در ظرف B می‌گذاریم، سپس از ظرف B یک مهره خارج می‌کنیم، با کدام احتمال این مهره سفید است؟

۰/۶۵ (۴)

۰/۶ (۳)

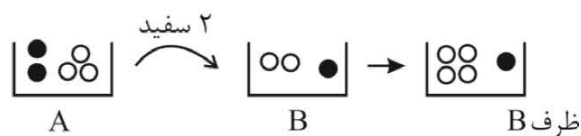
۰/۶۴ (۲)

۰/۲۸ (۱)

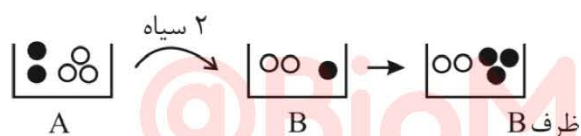
پاسخ: گزینه ۲



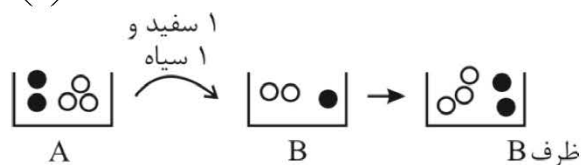
سه حالت داریم، یا از A دو مهره سفید برمی داریم و در B می گذاریم، یا دو مهره سیاه از A برمی داریم و در B می گذاریم و یا یک مهره سفید و یک مهره سیاه از A برمی داریم و در B می گذاریم و در نهایت از B یک مهره سفید برمی داریم، یعنی:



$$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{50}$$



$$\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{50}$$



$$\frac{\binom{2}{1} \binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} \times \frac{2}{5} = \frac{18}{50}$$

بنابراین:

$$B \text{ احتمال برداشتن مهره سفید از } = \frac{12}{50} + \frac{2}{50} + \frac{18}{50} = \frac{32}{50} = \frac{64}{100}$$

